Demodulacja kwadraturowa, czyli lockin dwufazowy

Wojciech Wasilewski

NINIEJSZA INSTRUKCJA

Służy zapoznaniu Was z zagadnieniem demodulacji niezwykle przydatnym przy pomiarze słabych sygnałów lub analizie sygnałów szybkozmiennych. Jest to narzędzie bardzo często wykorzystywane w eksperymentach fizycznych, potężne i zasadniczo nietrudne.

Przed ćwiczeniem wykonaj wszystkie numerowane polecenia *Oblicz, Wykonaj rysunek*. Polecenia z * są trudniejsze — opcjonalne.

I. NOTACJA

W tej instrukcji rozważmy zagadnienie odbioru sygnału ultradźwiękowego, który w niezaburzonej postaci mógłby zostać odebrany przez mikrofon jako napięcie sinusoidalnie zależne od czasu. W szkole napisalibyśmy: $U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ gdzie U_0 jest amplitudą, ω_0 częstością kołową, zaś ϕ fazą sygnału. Obecnie preferujemy raczej notację

$$U(t) = \Re(\tilde{U} \exp(i\omega_0 t)) = \frac{1}{2}\tilde{U} \exp(i\omega_0 t) + \text{c.c.} \tag{1}$$

gdzie zespolona amplituda $\tilde{U}$ opisuje zarówno amplitudę jak i fazę napięcia, $\Re$ oznacza częsc rzeczywistą, zaś c.c. sprzężenie zepolone. Można ją skonstruować ze szkolnych wielkości $\tilde{U} = U_0 \exp(i\phi)$. Można także jeszcze inaczej zapisać napięcie od czasu jako

$$U(t) = \Re(\tilde{U}) \cdot \cos(\omega_0 t) + \Im(\tilde{U}) \cdot \sin(\omega_0 t). \tag{2}$$

Niejednokrotnie wygodnie jest przedstawić amplitudę zespoloną $\tilde{U} = U_0 \exp(i\phi)$ w postaci wektora na płaszczyźnie zespolonej.

Uwaga zwróć uwagę na różnicę miedzy częstotliością — zwyczajowe oznaczenie f — która jest odwrotnością okresu drgań $T = 1/f$ oraz częstością kołową $\omega = 2\pi f$. Na wykresach oraz przy podawaniu liczb latwo o nieporozumienie, którego można uniknąć pisząc w przypadku częstości kołowej np. $\omega = 2\pi \times 100\,\text{Hz}$, zaś na osiach rysunkow generalnie najlepiej zawsze podawać czsętotliwość f. Wszelkie generatory pozwalają nam ustawiać częstotliwość f, czasem okres T, nigdy ω. Rachunki, przeciwnie, lepiej prezentują się w notacji z częstością kołową ω.

Oblicz 1. Sygnał z jednego generatora podłaczono do dwóch oscyloskopów. Oba oscyloskopy były wyzwalane z sygnału sieci elektrycznej 50 Hz, ale były ustawione na przeciwne zbocza (jeden na narastające, drugi na opadające), skutkiem czego ich wewnętrzne zegary były przesunięte w czasie. Na podstawie sygnału zarejestorwanego na jednym oscyloskopie student otrzymał $\tilde{U} = (1 + i)$ V oraz $\omega = 50\pi$/s. Jakie wyniki uzyska drugi student? Obaj używają czasu podanego przez zegar swojego oscyloskopu.

II. INTERFERENCJA

*Oblicz** Nieruchome punktowe źródło nadaje falę dźwiękową o stałej częstości ω_0. Wytworzony w makroskopowo nieruchomym powietrzu rozkład wahań ciśnienia ma wówczas postać fali sferycznej $p(\vec{r}, t) = \Re(p_0 \exp(i|k| \cdot |r| - i\omega_0 t)/|r|)$, gdzie $|\vec{r}|$ jest odległością od źródła, zaś $|k| = 2\pi/\lambda = \omega/c$ to długość wektora falowego. Rozważmy dwa źródła umieszczone na płaszczyźnie w punktach $(0, \pm d/2)$. Odbieramy sygnał od źródeł będąc w punkcie $R(\cos\alpha, sin\alpha)$, przy czym $R \gg d$. Oblicz wkład do odbieranego sygnału od każdego ze źródeł. Jeśli nie jesteś pewien jak skorzystać z faktu, że $R \gg d$, przybliż wyrażenia na odległosć typu $\sqrt{x^2 + y^2}$ poprzez rozwinięcie w szereg wzgledem małej wielkości d do pierwszego nieznikajacającego rzędu. Zaznacz zespolone amplitudy wkładów na płaszczyźnie zespolonej i prześledź, jak zmienia się ich suma wraz z kątem obserwacji α. Jaka zmienia się amplituda i faza sumy sygnałów?

III. POWOLNE ZMIANY

Zauważ że sygnał o częstotliwości $\omega' = \omega_0 + \Delta$ możemy przedstawić na dwa sposoby, które dobierzemy zależnie od kontekstu fizycznego. Możemy przyjąć $U(t) = \Re(\tilde{U}' \exp(i\omega' t))$ lub $U(t) = \Re(\tilde{U}(t) \exp(i\omega_0 t))$ gdzie $\tilde{U}(t) = \tilde{U}' \exp(it\Delta)$. Amplituda zespolona $\tilde{U}(t)$ zależy od czasu bardzo powoli, w przypadku procesów zachodzących na skali czasowej oscylacji ω można uznać ją za stałą. Jednocześnie jednostajny obrót amplitudy zespolonej $\tilde{U}(t)$ sygnalizuje przesuniecęie czętotliwości sygnału względem założonej częstotliwości ω_0.

Oblicz 2. Sygnał z generatora ustawionego na 50 Hz podłączono do oscyloskopu wyzwalanego z sygnału sieci elektrycznej 50 Hz. W każdym pomiarze rejestrowano 50 okresów oscylacji napięcia z generatora $U(t)$. Na początku wyznaczono $\tilde{U} = 1$ V. jednak po 5 minutach mierzony przebieg przesunął sie na ekranie oscyloskopu i obliczono $\tilde{U} = i$ V. Zgodnie z kalibracją częstotliwość generatora nie różni się o więcej niż 10 ppm (part per milion) od zadanej. Co można powiedzieć o rzeczywistej częstotliwości sieci energetycznej w dniu pomiarów?

*Rozważanie** Z jaką dokładnością można zmierzyć częstotliwość w ciągu 1 sekundy?

IV. ŚWIERGOT (CHIRP)

Oblicz 3. Nieruchome punktowe źródło nadaje falę dźwiękową o stałej częstości ω_0 ze środka ukladu współrzędnych. Mikrofon porusza się po prostej opisanej równaniem $(vt, d, 0)$ ze stałą prędkością v. Naszkicuj sytuację i oblicz rejestrowane wahania ciśnienia $p(t)$.

Jak opisać sygnał którego częstotliwość zmienia się w czasie? Analizując wyżej przedstawione rozważania możemy zauważyć, że rzeczywista częstość sygnału jest pochodną jego sumarycznej fazy (zawierajacej $\omega_0 t$) po czasie t. Jeśli badany sygnał $U(t)$ można zapisać jako część rzeczywistą pewnej funkcji $\mathcal{U}_+(t)$ o wolnozmiennym, nieznikającym module $U(t) = \Re(\mathcal{U}_+(t))$, to wówczas całkowita faza jest argumentem tej funkcji $\Phi(t) = \arg(\mathcal{U}_+(t))$. Wobec tego częstość chwilową określimy wzorem: $\omega(t) = d(\arg \mathcal{U}_+(t))/dt$.

*Oblicz** zależność częstości od czasu w poprzednim przykładzie.

Oblicz - modulacja fazowa* Niech $U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \phi(t))$ będzie przebiegiem o zmiennej w czasie fazie i połóżmy$\phi(t) = a\cos(\Omega t)$. Oblicz częstość chwilową [1].

Przykład - radio FM koduje sygnał akustyczny $p(t)$ jako zmianę częstotliwości nośnej (ang. frequency modulation).

Oblicz 4. Mikrofon i powietrze są nieruchome, natomiast źródło porusza sie na wózku wzdłuż osi x przechodzącej przez mikrofon umieszczony w punkcie $x = 0$. Położenie źródła $x(t) > 0$ zmienia się w czasie, ale prędkość $\dot{x}$ jest zawsze dużo mniejsza od prędkosci dźwięku c. Oblicz sygnał odbierany przez mikrofon.

V. MIESZACZ

Szczególną ę w pomiarach gra tzw. mieszacz (ang. mixer, także: mnożnik), który jest urządzeniem półprzewodnikowym produkującym napięcie proporcjonalne do iloczynu dwóch podanych napięć [2] $U_{\mathrm{mix}}(t) = 2\alpha U_1(t)U_2(t)$, gdzie α jest stałą określajacą wzmocnienie mieszacza. Rozwijając i porządkując wzgledem częstotliwości dostaniemy:

$$U_{\mathrm{mix}}(t) = \alpha\Re(\tilde{U}_1\tilde{U}_2^*) + \alpha\Re(\tilde{U}_1\tilde{U}_2 e^{2i\omega_0 t}). \qquad (3)$$

Napięcie na wyjściu miksera jest sumą dwóch składowych - oscylującej z podwojoną częstością $2\omega_0$ oraz stałej. W technice nazywa się je odpowiednio składową AC (alternating current) oraz DC (direct current).

*Narysuj** Wyrażenie (3) na płaszczyźnie zespolonej dla stałego zespolonego $\tilde{U}_1$ i dwóch wartości $\tilde{U}_2$.

*Oblicz** Uogólnij powyższy wzór na przypadek gdy częstości dwóch sygnałów są różne i wynoszą ω_1 i ω_2. Naszkicuj napięcie na wyjściu miksera, jeśli $\omega_1 = 2\pi \times 40\,\mathrm{kHz}$ zaś $\omega_2 = \omega_1 + 2\pi\,\mathrm{Hz}$.

*Rozważanie** Co można by było przyłaczyć na wyjściu miksera, żeby pozbyć sie składowej szybko oscylującej?

Mieszacz kwadraturowy jest używany w celu dokładnej analizy przebiegu $U(t)$, który rozdzielamy pomiędzy wejścia 1 dwóch mikserów. Potrzebny jest do tego dwukanałowy generato,r który generuje sygnały $U_Q(t)$ oraz $U_I(t)$ o tej samej amplitudzie i częstośsci ω_0 oraz fazach $0°$ oraz $90°$. Są to sygnały w tzw. *kwadraturze,* ponieważ zarysowują kwadrat na płaszczyźnie zespolonej. Podajemy te sygnały na wejścia nr 2 dwóch mikserów. Badany przebieg $U(t)$ rozdzielamy i podajemy na wejście 2. Wówczas na wyjściach mikserów dostaniemy napięcia proporcjonalne do $\Re(\tilde{U})$ oraz $\Im(\tilde{U})$ z dodatkiem składowych szybko oscylujących.

Terminologia mieszacze wykorzystuje się powszechnie w technice radiowej (i mikrofalowej). Mają one wówczas trzy złącza sygnałowe: wejściowe RF (radio frequency) i LO (local oscilator) oraz wyjściowe IF (intermediate frequency).

VI. FILTROWANIE

W poprzedniej sekcji zobaczyliśmy, że mieszanie sygnału odniesienia z generatora $U_Q(t) = cos(\omega_0 t)$ oraz badanego sygnału $U(t) = \Re(\tilde{U}(t)\exp(i\omega_0 t))$ produkuje sumę składowej stałej oraz składowej o częstości podwojonej $U_{mix}(t) = \alpha\Re(\tilde{U}(t)) + \alpha\Re(\tilde{U}(t)e^{2i\omega_0 t})$. Pierwszy wyraz reprezentuje napięcie stałe lub wolnozmienne, które można np. zmierzyć woltomierzem aby przekonać się o wartości części rzeczywistej amplitudy zespolonej $\tilde{U}$. Dlatego wolelibyśmy się pozbyć drugiego wyrazu, który może znacznie zafałszować odczyt woltomierza. W tym celu użyjemy filtra dolnoprzepustowego.

(Zasilony) filtr dolnoprzepustowy o stałej czasowej τ produkuje sygnał $U_{out}(t)$, który jest ściśle rzecz biorąc tzw. splotem sygnału wejściowego $U_{in}(t)$ oraz odpowiedzi filtra $h(t) = \exp(-t/\tau)$:

$$U_{out}(t) = U_{in}(t) \star h(t) := \int_{-\infty}^{t} dt' U_{in}(t')h(t-t'). \quad (4)$$

Splot jest linowy, tzn $(\alpha f(t) + \beta g(t)) \star h(t) = \alpha(f(t) \star h(t)) + \beta(g(t) \star h(t))$.

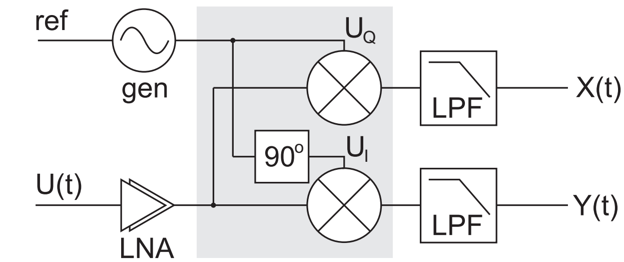
Oblicz 5 Stosunek amplitudy wyjściowej do amplitudy wejściowej po podaniu na wejściu sygnału o częstotliwości ω. Uwaga: wynik jest liczbą zespoloną zawierającą informacje o przesunieciu fazy.

Oblicz 6 Przefiltrowany sygnał $U_{\mathrm{mix}}(t)$ dany równaniem (3). Jaka musi być stała czasowa filtra τ aby osłabić składową o podwojonej częstości 1000 razy w stosunku do składowej stałej?

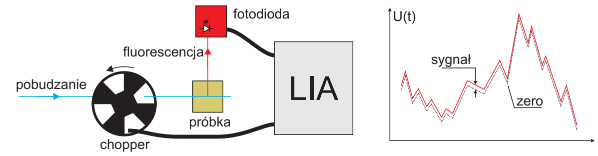
---

[1] Na marginesie wspomnę, że tego typu przebieg w zakresie częstotliwości akustycznych (kilkadziesiąt aż do pojedynczych tysięcy Hz), zależnie od wartości a, oraz po uzmiennieniu w czasie amplitudy U_0 może brzmieć jak szereg różnych instrumentów muzycznych (zob. *Frequency modulation synthesis*).

[2] vide np. AD633 albo Double balanced diode mixer circuit



Rysunek 1. Zasadnicze części wzmacniacza fazoczułego (lock-in). ref -wejście częstotliwości odniesienia synchronizujące wewnętrzny generator sinusoidalny, $U(t)$ - wejście sygnału badanego, LNA - wzmacniacz niskoszumny, 90°-przesuwnik fazy, LPF - filtr dolnoprzepustowy, $X(t)$, $Y(t)$ - wyjścia.



Rysunek 2. Typowy układ pomiarowy ze wzmacniaczem fazoczułym. Badany proces fizyczny modulujemy w kontrolowany sposób i informacje o modulacji przekazujemy do wejścia referencyjnego. Ze wzgledu na szumy, dryf i zakłócenia elektroniki sygnał mierzony pod nieobecność pobudzania nie jest dokładnie zerowy, jak to przedstawia linia przerywana „zero". Mały dodatkowy wkład sygnału mógłby być na tym tle niezauważalny. Dzięki zastosowaniu modulacji mały dodatkowy wkład ma inną czętotliwość niż większosć zakłóceń jest łatwieszy do dokładnego zmierzenia.

VII. LOCK-IN

W laboratorium często używamy przyrządu lock-in (pl. wzmacniacz fazoczuły). Schemat blokowy zawierający jego zasadnicze części przedstawia rysunek 1. Przyrząd ma wejście sygnałowe $U(t)$, z którego sygnał jest wzmacniany i podawany na mieszacze w konfiguracji kwadraturowej. Sygnał referencyjny, który moze mieć dosyć dowolną, byle okresową postać, służy do synchronizacji wewnętrznego generatora, który podaje napięcia na drugie porty mikserów. Wyjścia mikserów trafiają do filtrów dolnoprzepustowych. Przyrząd umożliwia ustawienie wzmocnienia wejściowego oraz stałej czasowej filtrów τ.

*Sprawdź** że lock-in jest urządzeniem liniowym - działanie dla napiecia bedącego sumą napieć sygnał

*Oblicz** Na wejście sygnałowe lock-in podano sygnał o częstości innej niż referencyjna $\omega = \omega_{\text{ref}} + \Delta$, zaś stała czasowa wynosiła τ. Jaki będzie sygnał na wyjściu w funkcji Δ?

Typowy eksperyment z użyciem wzmacniacza fazoczułego przedstawia rysunek 2. Mierzone procesy fizyczne często są na tyle słabe, że bardzo trudno je dostrzec na tle dryfu, zakłóceń i szumów elektorniki. Rozważmy sytuację bez modulacji. Pod nieobecnosć pobudzania sygnał z fotodiody nie jest dokładnie zerowy, lecz składa sie z szumu, w tym dryfu, oraz zakłóceń, np. 50 Hz z sieci energetycznej, jak to przedstawia linia przerywana „zero" na rysunku 2. Włączenie pobudzania spowoduje dodanie właściwego sygnału do tego tła, jak to przedstawia czerwona linia ciągła na rysunku 2. Małe przesunięcie może być niezauważalne, a jego wielkość trudno mierzalna. Co się stanie, jeśli właczymy chopper i bedziemy z dużą częstością na zmianę włączać i wyłączać pobudzanie? Sygnał z fotodiody będzie wówczas sumą dryfu, szumu i skladowej zmiennej synchronicznej z pobudzaniem. Wzmacniacz fazoczuły pozwala wyłuskać tę ostatnią składową.

*Rozważanie** Sygnał z fotodiody pod nieobecność fluorescencji składa się z zakłóceń na częstości sieci energetycznej 50 Hz i harmonicznych $n \times 50$ Hz, oraz z powolnego dryfu widocznego na skali czasu powyżej 1 s. Jaką prędkość obrotu tarczy choppera i stała czasową lock-ina należy dobrać?

VIII. PRZYKŁAD: POMIAR ODLEGŁOŚCI

Rozważmy zagadnienie pomiaru odległości $x(t)$ między źródłem a mikrofonem. Odległość ta zmienia się powoli, tzn. $\dot{x} \ll c$. Jeśli sygnał z mikrofonu podłączymy do wzmacniacza fazoczułego o odpowiednio krótkiej stałej czasowej, to na jego wyjściach dostaniemy sygnały $X(t) \propto \cos\phi(t)$ oraz $Y(t) \propto \sin\phi(t)$ gdzie $\phi(t) = \ldots x(t)$.

Narysuj 7 jak powinien być podłączony generator, nadajnik, mikrofon, lock-in?

Oblicz 8 stałą proporcjonalności między fazą a położeniem. Jaka będzie ta stała dla $\omega = 2\pi \times 40$ kHz?

*Oblicz** maksymalną stałą czasową wzmacniacza lock-in przy prędkości maksymalnej wózka $\dot{x} = 1$ cm/s.

*Rozważanie** generator ma pokrętło amplitudy oraz fazy generowanego sygnału. Jeśli sygnał z generatora trafia do żróżdła dźwięku oraz wejścia referencyjnego wzmacniacza fazoczułego, to jaki efekt będzie miała regulacja ustawień generatora?

Opisane sygnały zmierzymy za pomocą oscyloskopu, zapisując przebieg $X(t)$ oraz $Y(t)$. Jak odzyskać stąd fazę $\phi(t)$ i następnie położenie $x(t)$? Do obczenia fazy służy funkcja $\text{atan2}(X(t), Y(t))$ która wykorzystuje tan bądź ctan zależnie od ćwiartki układu współrzędnych, w której są zbierane dane. Wynik działania tej funckji zawiera sie w graniacach $-\pi$ do π.

Oblicz 9 tor ma długość $L = 2$ m, którą wózek pokonuje w czasie $T = 20$ s ruchem jednostajnym. Naszkicuj, jak będą wyglądać zmierzone $X(t)$, $Y(t)$ oraz obliczone $\phi(t)$.

Ponieważ obliczona faza $\phi(t)$ nie jest jednoznaczna, do odzyskania położenia $x(t)$ wykorzystamy fakt fizyczny, że wózek nie wykonuje nagłych skoków. Można wobec tego sformułować algorytm *unwrap*. Jeśli dwa kolejne punkty w czasie t_n i t_{n+1} różnią się fazą o więcej niż π to należy dodać/odjąć 2π do wszystkich faz w czasie $t > t_n$ tak aby skok zniwelować.

*Oblicz** Ile punktow musi mieć przebieg zebrany na oscyloskopie żeby można było jednoznacznie stwierdzić, jaki dystans pokonał wózek? tzn. aby powyższy algorytm nigdy nie pomylił się przy korygowaniu przeskoków fazy. Wózek porusza sie ruchem jednostajnym.

IX. PRZEBIEG ĆWICZENIA - TOR POWIETRZNY

1. Podłaczyć generator do oscyloskopu i nadajnika, a mikrofon do kolejnego kanału oscyloskopu. Zaobserwować sygnały, sprawdzić że faza zmenia zgodnie z przewidywaniami

2. Podłaczyć lock-in zgodnie z powyższą instrukcją. Zachowaj podłaczenia do oscyloskopu z pkt. 1. Sprawdź poprawność reakcji na odsuwanie mikrofonu.

3. Kalibracja odległości/prędkości dźwięku: wykorzystując najdłuższy możliwy ruch wózka i suwmiarkę zmierz długość fali dźwięku z najlepszą możzliwą precyzją

4. (opcjonalnie) analogicznie ustaw drugi wózek używajac drugiego nadajnika i innej częstotliwości

5. Zmierz i zapisz $X(t)$ oraz $Y(t)$ dla ruchu jednostajnego.

W domu: opracuj dane (w domu miedzy tygodniami zajęć).

Drugi tydzień:

1. Zmierz przyspieszenie ziemskie
2. Zweryfikuj prawa odbicia sprężystego